Über die Hilbert-Story'schen invarianten-erzeugenden Prozesse.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung
der philosophischen Fakultät der Universität Basel

von

Alwin von Rohr,

Olten.

Basel
Buchdruckerei Emil Birkhäuser & Cie.
1933

Über die Hilbert-Story'schen invarianten-erzeugenden Prozesse.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung
der philosophischen Fakultät der Universität Basel

von

Alwin von Rohr,

Olten.

Basel
Buchdruckerei Emil Birkhäuser & Cie.
1933

Genehmigt von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der philosophischen Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. A. Ostrowski und O. Spiess.

Basel, den 1. März 1932.

Prof. Dr. *A. Buxtorf*,
Dekan.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Separatabdruck aus den
Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel.
Band XLIV, 2. Teil.

Über die Hilbert-Story'schen invariantenerzeugenden Prozesse.

Von

Alwin von Rohr, Olten.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	2
I. Kapitel: **Vorbereitungen und Problemstellung**	3—12
1. Invarianten und Kovarianten im binären Gebiet	3
2.—9. Dasselbe im $\varkappa$-nären Gebiet	5
10.—11. Die Hilbert'schen Invariantenoperatoren im Gebiet der binären Formen und die Elliott'schen Produktdarstellungen	9
12. Die Story'schen Formeln	10
13. Formulierung der Fragestellung und der Resultate	11
II. Kapitel: **Herleitung der Produktformeln**	12—25
14. Vorbemerkungen	12
15. Gewichts- und Exponentensumme	13
16. Der Fall $s = 1$	14
17. Der Schluss von r auf $r + 1$. Formulierung der Behauptung	14
18.—25. *Herleitung zweier Hilfsformeln*	15—22
19. Der erste Schritt der Umformung	15
20. Ausdrücke B_k und B_k^*, D_k und D_k^*	17
21. Ausdrücke F_k und F_k^*	18
22. Operatoren C_k bzw. C_k^*	19
23. Ausdrücke A_k und A_k^*	19
24. Rekursionsformeln für Ak und A_k^*	20
25. Herleitung von (19, 1) und (19, 2)	21
26.—31. *Beweis der Formeln* (17, 1) und (17, 2)	22—25
III. Kapitel: **Äquivalenz von Q und Q^***	25
32. Identität von K und K^*	25
33.—34. Beweis der Ungleichung $w^* > w$	26

Einleitung.

Zwei von HILBERT in seiner Dissertation (1885) gegebene Erzeugungsprozesse für Invarianten und Kovarianten binärer Formen sind von STORY (1893) auf $\varkappa$-näre Formen ausgedehnt worden. Während aber bereits von HILBERT festgestellt wurde, dass seine beiden Prozesse in ihrer Wirkung äquivalent sind, d. h. dieselben Invarianten bzw. Kovarianten ergeben, ist für die analogen $\varkappa$-nären Prozesse diese Frage, die in der Abhandlung von Story aufgeworfen wird, bisher unerledigt geblieben. Diese Frage wird in der vorliegenden Abhandlung bejahend beantwortet, d. h. wir werden zeigen, dass die beiden STORY'schen Prozesse dieselben Invarianten bzw. Kovarianten ergeben. Dabei werden wir namentlich eine von ELLIOTT gegebene Produktdarstellung für die HILBERT'schen Prozesse auf die $\varkappa$-nären Formen ausdehnen, wodurch wir eine, wie wir glauben, wesentlich übersichtlichere Darstellung der STORY'schen Prozesse erhalten.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt: im ersten Kapitel erinnern wir an die wesentlichsten in Betracht kommenden Definitionen und Sätze und geben insbesondere in den Nummern 10—13 eine genauere Darstellung des hier in Betracht kommenden Problemkreises und vollständige Formulierung unserer Resultate. Im zweiten Kapitel erbringen wir den Beweis unserer Produktdarstellung für die STORY'schen Operatoren. Wir beweisen aber zugleich eine wesentlich allgemeinere Formel, wodurch es ermöglicht wird, den Schluss von n auf $n + 1$ zu führen. Im dritten Kapitel endlich beweisen wir die Äquivalenz der beiden STORY'schen Operatoren und tragen dann zum Schluss den Beweis eines dabei benützten Hilfssatzes nach, bei dem die Elemente der symbolischen Methode herangezogen werden müssen.

Da wir an einigen Stellen Bezeichnungen einführen müssen, die entweder neu sind oder von den bisher benutzten abweichen, stellen wir nachstehend die von uns benutzten Bezeichnungen und Symbole zusammen.

Ich möchte endlich Herrn Prof. OSTROWSKI bestens danken, der mich auf dieses Problem hingewiesen hat und mir bei der Durchführung der Untersuchung hilfreich zur Seite stand.

Symbole und Bezeichnungen.

n = *Ordnung* der Grundform im $\varkappa$-nären Gebiet.
i = *Grad* einer Invariante, bzw. Kovariante in bezug auf die Koeffizienten.

ω = *Ordnung* einer Kovariante; w = *Gewicht* (p. 7, (2, 6)); w^* = *Ergänzungsgewicht* (p. 7, (2, 8)).
$w_x, w_y, \ldots$ = *Partialgewichte* in bezug auf die Variablen $x, y, \ldots$
$w_x^*, w_y^*, \ldots$ = *Partielles Ergänzungsgewicht* in bezug auf die Variablen $x, y, \ldots$
$W = w + w^* =$ *Gesamtgewicht* $= in + \omega$.

$$\widehat{yx} = \sum i\, a_{h+1,\, i-1,\, k \ldots l} \frac{\partial}{\partial a_{h,\, i,\, k \ldots l}} - y \frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{(p. 7, (3, c))}.$$

K, K' p. 9, (10, 1), (10, 2), HILBERT'sche Differentialprozesse.
K, K^* p. 10, (12, 3), p. 11, (12, 5).
Ω, O p. 5, (1, 6), (1, 7); $Q\varphi$, $Q^*\varphi$, p. 10, (12, 1), (12, 4).
$Q\varphi = \{x, y, z, \ldots u; v\}$ p. 10 (12, 2). Δ, Δ^* Nr. 13, p. 11 u. 12.
$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})$, Nr. 14, p. 12.
Gradient p. 10.

Literatur.

HILBERT, Dissertation (1885): Über die invarianten Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunktionen, sowie Math. Ann., Bd. 30, p. 15: Über eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiete.

STORY, On the Covariants of a System of Quantics. Math. Ann., Bd. 41 (1893).

ELLIOTT, An Introduction to the Algebra of Quantics. Oxford 1912.

DICKSON-BODEWIG, Höhere Algebra. Deutsche Ausgabe, Leipzig 1929.

CLEBSCH, Theorie der binären algebraischen Formen 1872. Leipzig.

WEITZENBÖCK, Invariantentheorie. Grooningen 1923.

PASCAL, Repertorium der höhern Mathematik, II. Aufl., Bd. I, 1. Hälfte, Kap. V, p. 358ff.

DAVID HILBERT, Gesammelte Abhandlungen, Bd. 2 [Berlin, Julius Springer], p. 1—33, p. 102—116.

Die angeführten Arbeiten und Bücher zitieren wir später in der Regel einfach mit der Angabe des Namens des Verfassers.

I. Kapitel.

Vorbereitungen und Problemstellung.

1. *Invarianten und Kovarianten im binären Gebiet*[1]). Ist

$$F \equiv a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n \qquad (1,1)$$

eine binäre Grundform n-ter Ordnung, so geht sie, wenn man sie einer linearen Substitution:

$$x = \alpha_1 X + \beta_1 Y \qquad y = \alpha_2 X + \beta_2 Y \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1,2)$$

[1]) Vergl. hierzu die oben angegebene Literatur.

unterwirft, in die transformierte Form über

$$(1,3) \qquad A_0 X^n + \binom{n}{1} A_1 X^{n-1} Y + \cdots + A_n Y^n,$$

wo die $A_1, A_2, \ldots A_n$ Polynome in den $a_1, a_2, \ldots a_n$ sind. Polynome $K(a_1, \ldots a_n)$ in den Koeffizienten a_ν, die durch die Substitution (1, 2) wieder in sich übergehen, bis auf eine Potenz von Δ, bezeichnen wir als *Invarianten* von F. Es gilt also für Invarianten als Polynome in den a_ν definitionsgemäss die Gleichung:

$$(1,4) \qquad K(A_1, A_2, \ldots A_n) = \Delta^p K(a_1, a_2, \ldots a_n).$$

p, der Exponent von Δ, wird als das *Gewicht* der Invariante bezeichnet.

Polynome in den Koeffizienten *und* den Variablen x, y, die im obigen Sinne invariant gegenüber (1, 2) sind, heissen *Kovarianten*. Ist also $L = L(a_1, a_2, \ldots a_n;\ x, y)$ eine Kovariante von F, so genügt L definitionsgemäss der Gleichung:

$$(1,5) \quad L(A_1, A_2, \ldots A_n;\ X, Y) \equiv \Delta^p L(a_1, a_2, \ldots a_n;\ x, y).$$

Unsere Invarianten und Kovarianten lassen sich in Summen von in den a_ν und ebenso in den x, y homogenen Polynomen zerlegen, die ihrerseits Invarianten bzw. Kovarianten sind; *nur solche sollen im folgenden betrachtet werden.*

Dann besitzen die Invarianten und Kovarianten folgende für uns wichtige Eigenschaften:

a) Sie sind homogen in den a_i; und die Kovarianten sind daneben auch noch homogen in den x, y. In bezug auf die Koeffizienten a_i besitzt jedes Glied einer Invariante bzw. Kovariante denselben Grad, den man als den „Grad" der Invariante bzw. Kovariante nennt; ich bezeichne ihn mit i, dagegen wird in einer Kovariante der Grad in bezug auf die *Variablen* x, y als die „Ordnung" bezeichnet; dafür werden wir ω benutzen.

b) Alle Glieder einer *Invariante* müssen stets dieselbe Summe der Indices der Koeffizienten — dieselben „Gewichte" — besitzen. Eine Invariante ist also „isobar". Für das Gewicht benutzen wir gewöhnlich w. Für eine Invariante ist dann das Gewicht w gleich dem obigen Exponenten p von Δ in der Gleichung (1, 4). Für jeden einzelnen Koeffizienten ist der Index sein Gewicht (z. B., a_5 besitzt das Gewicht 5, $a_0 a_1 a_4 a_6$ hat den Grad 4 und das Gewicht 11). Für das Gewicht einer

Invariante gilt dann die Beziehung: $w = \frac{i\,n}{2}$, wo i der Grad der Invariante, n die Ordnung der Grundform ist.

Was das Gewicht der *Kovarianten* anbetrifft, so gilt in bezug auf die Koeffizienten dasselbe wie für die Invarianten, darüber hinaus aber erteilen wir der Variablen x das Gewicht 1, der Variablen y das Gewicht 0. Auch hier wird allgemein als das Gewicht eines Potenzproduktes in den a_i, x, y die Summe der Gewichte der einzelnen Faktoren bezeichnet. Auch alle Glieder einer Kovariante besitzen dann stets dasselbe Gewicht. Für das Gewicht einer Kovariante gilt dann die Beziehung: $w = \frac{i\,n + \omega}{2}$, wo ω die Ordnung der Kovariante ist.

c) Eine Invariante bzw. Kovariante wird durch folgende Differentialoperatoren, die von ARONHOLD entdeckt worden sind, zum Verschwinden gebracht:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} i\,a_{i-1}\frac{\partial}{\partial a_i} - y\frac{\partial}{\partial x} \tag{1,6}$$

und

$$O = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)\,a_{i+1}\frac{\partial}{\partial a_i} - x\frac{\partial}{\partial y}\,. \tag{1,7}$$

Ist K also irgend eine Kovariante oder Invariante, so gilt

$$\Omega K \equiv 0,\ OK \equiv 0. \tag{1,8}$$

Besitzt aber umgekehrt eine Form die Eigenschaften a, b, c, so ist sie entweder eine Invariante oder Kovariante (ARONHOLD, SYLVESTER, CAYLEY).

2. *Invarianten und Kovarianten im $\varkappa$-nären Gebiet*[1]). Im Gebiete mehrerer Variablen $x, y, \ldots t$ gelten ganz entsprechende Definitionen und Eigenschaften der Invarianten bzw. Kovarianten. Unterwirft man eine Grundform F von der Ordnung n im $\varkappa$-nären Gebiete:

$$F \equiv \sum_{\substack{h,\,i,\,k,\,\ldots\,m \\ (h+i+k+\cdots+m=n)}} \frac{n!}{h!\,i!\,k!\cdots m!}\,a_{h,\,i,\,k,\,\ldots\,l,\,m}\,x^k\,y^i\,z^k\cdots v^m \tag{2,1}$$

einer linearen Transformation:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z + \cdots + \alpha_\varkappa T \\ y &= \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z + \cdots + \beta_\varkappa T \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v &= \varepsilon_1 X + \varepsilon_2 Y + \varepsilon_3 Z + \cdots + \varepsilon_\varkappa T, \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \ldots \alpha_\varkappa \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \ldots \beta_\varkappa \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_\varkappa \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2,2}$$

[1]) Vergl. hierzu die oben angegebenen Lehrbücher.

so geht sie über in:

$$(2,3) \qquad \sum_{\substack{h,\,i,\,\ldots\,m \\ (h+i+\cdots+m=n)}} \frac{n!}{h!\,i!\cdots m!}\, A_{h,\,i,\,\ldots\,m}\, X^h\, Y^i \cdots T^m .$$

Ist $K = K(a_{h,\,i,\,k,\,\ldots\,m})$ eine in den $a_{h,\,i,\,k,\,\ldots\,m}$ homogene Invariante von F, so gilt *definitionsgemäss* die folgende Gleichung:

$$(2,4) \qquad \begin{aligned} &K(A_{n,\,o,\,o,\,\ldots\,o},\ \ldots\ A_{i,\,h,\,k,\,\ldots\,m},\ \ldots) \\ &= \Delta^p \cdot K(a_{n,\,o,\,o,\,\ldots\,o},\ \ldots\ a_{h,\,i,\,k,\,\ldots\,m},\ \ldots). \end{aligned}$$

Ferner gilt die analoge Gleichung für eine *Kovariante* L:

$$(2,5) \qquad \begin{aligned} &L(\ldots, A_{h,\,i,\,k,\,\ldots\,m},\ \ldots;\ X, Y, Z, \ldots T) \equiv \\ &\equiv \Delta^p \cdot L(\ldots a_{h,\,i,\,k,\,\ldots\,m},\ \ldots;\ x, y, z, \ldots t\,\}. \end{aligned}$$

Wir betrachten wieder wie im binären Falle nur homogene Invarianten bzw. Kovarianten. Sie besitzen ganz analoge Eigenschaften wie im binären Falle:

a) Sie sind *homogen* in den Koeffizienten und, sofern es Kovarianten sind, auch noch in den Variablen; d. h. jedes einzelne Glied hat denselben *Grad* in den Koeffizienten und, sofern es sich um eine Kovariante handelt, dieselbe *Ordnung* in den Variablen. Mit i wird der *Grad* in den Koeffizienten, mit ω die *Ordnung* in den Variablen bezeichnet.

b) Sie sind *isobar*.

Für jeden Koeffizienten $a_{h,\,i,\,k,\,\ldots\,m}$ bezeichnen wir die Indices $h, i, k, \ldots$ als *x-Partialgewicht*, *y*-Partialgewicht usw. Für ein Potenzprodukt ist das x-Partialgewicht $w_x = \Sigma h$ über alle Faktoren, das y-Partialgewicht Σi über alle Faktoren usw.: so hat z. B. das Potenzprodukt $a_{270}^2 \ldots a_{101} \ldots$

$$w_x = 5,\ w_y = 14,\ w_z = 1, \ldots$$

Eine Invariante ist nunmehr isobar in dem Sinne, dass die Partialgewichte jedes ihrer Glieder in bezug auf sämtliche Variablen einander gleich sind und darüber hinaus für sämtliche Glieder der Invariante den gleichen Wert haben.

Unseren Grundvariablen legen wir in bezug auf x das Partialgewicht 1 bei, mit Ausnahme von x selbst, die das Partialgewicht 0 erhält. Ebenso ist das y-Partialgewicht aller Variablen gleich 1, mit Ausnahme von y selbst, das das Gewicht 0 erhält usw.

Mit dieser Definition ist auch jede Kovariante isobar in dem Sinne, dass alle Partialgewichte ihrer sämtlichen Glieder

in bezug auf alle Variablen den gleichen Wert haben. Diesen gemeinsamen Wert werden wir mit w bezeichnen. w hat für eine Kovariante den Wert:

$$(2,6) \qquad w = w_x = w_y - \cdots = \frac{ni + (\varkappa - 1)\,\omega}{\varkappa}.$$

Im Falle der Invariante ist w gleich dem Exponenten p in Formel (2, 4).

Unter dem *Gesamtgewicht* W einer Kovariante verstehen wir die Summe sämtlicher Indices eines Gliedes, vermehrt um die Summe ω aller Exponenten der Grundvariablen in diesem Gliede. (Für eine Invariante ist das Gesamtgewicht W gleich der Summe $w_x + w_y + w_z + \cdots$ aller Partialgewichte.) W hat für eine Kovariante den Wert:

$$(2,7) \qquad W = in + \omega.$$

Die Differenz zwischen dem Gesamtgewicht W und dem Partialgewicht w_x, bzw. $w_y, \ldots$ bezeichnen wir als *Ergänzungsgewicht*

$$w_x^* = W - w_x,\ w_y = W - w_y, \ldots$$

Für eine Kovariante gilt deshalb:

$$(2,8) \quad w_x^* = w_y^* = \cdots = w^* = W - w = in + \omega - \frac{ni + (\varkappa - 1)\,\omega}{\varkappa} = \frac{in(\varkappa - 1) + \omega}{\varkappa}.$$

3. c) Jede Invariante oder Kovariante wird durch die Cayley'schen Differentialoperatoren zum Verschwinden gebracht: Es sind dies:

$$\widehat{yx} = \sum i\, a_{h+1,\,i-1,\,k,\,\ldots m} \cdot \frac{\partial}{\partial a_{h,\,i,\,k,\,\ldots m}} - y\,\frac{\partial}{\partial x},$$

$$\widehat{xy} = \sum h\, a_{h-1,\,i+1,\,k,\,\ldots m} \cdot \frac{\partial}{\partial a_{h,\,i,\,k,\,\ldots m}} - x\,\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\widehat{xz} = \sum h\, a_{h-1,\,i,\,k+1,\,\ldots m} \cdot \frac{\partial}{\partial a_{h,\,i,\,k,\,\ldots m}} - x\,\frac{\partial}{\partial z}$$

und die analog gebildeten $\widehat{zx}$, $\widehat{yz}$, $\widehat{zy}, \ldots \widehat{ux}$, $\widehat{xu}, \ldots$. Für ein $\varkappa$-näres Gebiet erhalten wir insgesamt $\varkappa(\varkappa - 1)$ solcher Aronhold'scher Differentialoperatoren. $\widehat{yx}$ und $\widehat{xy}$ sind zu Ω und O analog. Für diese Differentialoperatoren gelten folgende Sätze (für die Beweise verweisen wir im allgemeinen auf Story):

4. Durch Anwendung von $\widehat{xy}$ wird für jeden isobaren Ausdruck w_x um 1 vergrössert, w_y um 1 verkleinert, und damit, wegen $w_x^* = W - w_x$, $w_y^* = W - w_y$, das x-Ergänzungsgewicht w_x^* um 1 vergrössert, das y-Ergänzungsgewicht w_y^* um 1 verkleinert. In der Tat erkennt man aus der Definition von $\widehat{xy}$ sofort, dass ein $a_{h,i,k,\ldots m}$ durch ein Glied ersetzt wird, das den Index h um 1 kleiner und den Index i um 1 grösser hat. Damit ist aber w_x um 1 kleiner geworden, und w_y um 1 grösser.

5. Für das Rechnen mit den Differentialoperatoren gelten folgende Regeln (Story, p. 480):

a) $\widehat{xy}\,\widehat{zs}\,K \equiv \widehat{zs}\,\widehat{xy}\,K$
b) $\widehat{xy}\,\widehat{xz}\,K \equiv \widehat{xz}\,\widehat{xy}\,K$
c) $\widehat{xy}\,\widehat{zy}\,K \equiv \widehat{zy}\,\widehat{xy}\,K$
d) $\widehat{xy}\,\widehat{yx^\alpha}\,K \equiv \widehat{yx^\alpha}\,\widehat{xy}\,K + \alpha\,(w_x^* - w_y^* - \alpha + 1)\,\widehat{yx^{\alpha+1}}\,K$
e) $\widehat{xy}\,\widehat{yz^\beta}K \equiv yz^\beta \cdot \widehat{xy}\,K - \beta\,\widehat{yz^{\beta-1}}\widehat{xz}\,K$
f) $\widehat{xy}\,\widehat{zx^\gamma}\,K \equiv \widehat{zx^\gamma}\,\widehat{xy}\,K + \gamma\,z\widehat{x^{\gamma-1}}\,\widehat{zy}\,K$

6. Wird ein im obigen Sinne (vergl. Nr. 2) isobarer Ausdruck S durch $\widehat{yx}$ zum Verschwinden gebracht, so gilt auch $\widehat{xy}\,S \equiv 0$.

Beweis: Es sei α der höchste Exponent, für den $\widehat{xy^\alpha}\,S \not\equiv 0$. Eine solche Zahl α gibt es immer, da ja w_x^* bei Anwendung von $\widehat{xy}$ stets um 1 verkleinert wird und offenbar nicht negativ sein kann. Dann ist nach der Identität 5d)

$$\widehat{xy^{\alpha+1}}\,\widehat{yx}\,S + (\alpha+1)(w_y^* - w_x^* - \alpha)\,\widehat{xy^\alpha}\,S \equiv \widehat{yx}\,\widehat{xy^{\alpha+1}}\,S \equiv 0,$$

so dass

$$(\alpha+1)(w_y^* - w_x^* - \alpha)\,\widehat{xy^\alpha}\,S \equiv -\widehat{xy^{\alpha+1}}\,\widehat{yx}\,S$$

ist. Nun sei $\widehat{yx}\,S \equiv 0$, also muss $\alpha = w_y^* - w_x^*$ sein, da $\widehat{xy^\alpha}\,S \not\equiv 0$ ist. w_y^* ist aber gleich w_x^*, so dass $\alpha = 0$ ist, w.z.b.w.

7. Wenn sowohl $\widehat{xy}\,S \equiv 0$, als auch $\widehat{yz}\,S \equiv 0$, so ist auch $\widehat{xz}\,S \equiv 0$.

Beweis: Nach 7e) ist $\widehat{xy} \cdot \widehat{yz} \cdot S \equiv \widehat{yz}\,\widehat{xy}\,S - \widehat{xz}\,S$, die linke Seite verschwindet nach Annahme, ebenso ist $\widehat{xy}\,S \equiv 0$, also ist auch $\widehat{xz}\,S \equiv 0$ (Story, Satz VI, p. 481).

Ist S eine homogene und isobare Form und gilt für sie $w_x = w_y = \ldots = w_v$ und $\widehat{yx}\,S \equiv 0$, $\widehat{zx}\,S \equiv 0$, $\ldots$ $\widehat{vx}\,S \equiv 0$, so folgt aus Satz 6, dass auch $\widehat{xy}\,S \equiv 0$, $\widehat{xz}\,S \equiv 0$, $\ldots$ $\widehat{xv}\,S \equiv 0$ ist, und nach Nr. 7, dass S auch durch die übrigen Operatoren $\widehat{yz}, \widehat{zy}, \widehat{yu}, \ldots \widehat{uy}, \ldots \widehat{vy}, \widehat{yv}, \ldots$ zum Verschwinden gebracht

wird. Z. B. ist nach Nr. 7 auch $\widehat{uv}\ S \equiv 0$, sofern $\widehat{xv}\ S \equiv 0$, $\widehat{ux}\ S \equiv 0$.

Dies spielt in unseren Betrachtungen eine wichtige Rolle. Wir formulieren diese Tatsachen wie folgt:

8. Ist K ein im Sinne von No. 2 homogener, isobarer Ausdruck und genügt K allen Bedingungen $\widehat{yx}\ K \equiv 0$, $\widehat{zx}\ K = 0$, $\ldots \widehat{tx}\ K \equiv 0$, so ist K eine Kovariante oder Invariante.

9. Damit K eine Kovariante (oder Invariante) ist, genügen neben den Bedingungen von 8. auch die mit ihnen äquivalenten Bedingungen. (STORY, p. 485) $\widehat{xy}\ K \equiv 0$, $\widehat{xz}\ K = 0, \ldots \widehat{xt}\ K = 0$.

10. *Die Hilbert'schen Invariantenoperatoren im Gebiet der binären Formen und die Elliott'schen Produktdarstellungen.* Ich will die Fragestellung am Beispiel der binären Formen erläutern, wo alle Resultate bereits bekannt sind und auf Hilbert bzw. ELLIOTT zurückgehen. Wir betrachten Polynome in den Koeffizienten und eventuell den Variablen von (1, 1), die alle in 1. angeführten Homogenitäts- und Isobaritätseigenschaften besitzen, dagegen nicht notwendig den CAYLEY'schen Differentialgleichungen genügen. Solche Polynome bezeichnen wir mit ELLIOTT (ELLIOTT, p. 138) als *Gradienten*. Alle Glieder einer Invariante resp. Kovariante sind Gradienten. Mit Hilfe von gewissen Differentialoperatoren können wir nun aus jedem Gradienten eine Invariante resp. Kovariante berechnen. Und zwar hat ein zuerst von HILBERT[1]) aufgestellter Differentialprozess dieser Art die folgenden Formen:

$$(10,1)\quad K \equiv \left(1 - \frac{O\,\Omega}{1!\,2!} + \frac{O^2\,\Omega^2}{2!\,3!} + \cdots + (-1)^k \frac{O^k\,\Omega^k}{k!\,(k+1)!} + \cdots\right)\varphi$$

$$(10,2)\quad K' \equiv \left(1 - \frac{\Omega O}{1!\,2!} + \frac{\Omega^2 O^2}{2!\,3!} + \cdots + (-1)^k \frac{\Omega^k O^k}{k!\,(k+1)!} + \cdots\right)\varphi.$$

In den HILBERT'schen Untersuchungen ist zugleich der Beweis enthalten, dass K und K' miteinander identische Prozesse sind.

Zur Berechnung von K bzw. K' haben wir übrigens nur die ersten $w + 1$ Glieder nötig; denn es ist sowohl $\Omega^{w+1}\varphi = 0$ als auch $O^{w+1}\varphi = 0$, wenn w das Gewicht von φ bedeutet. In der Tat wird durch Anwendung von Ω das Gewicht w um 1 vermindert. Also müsste $\Omega^{w-1}\varphi$ ein negatives Gewicht besitzen, was unmöglich ist. Und analog vergrössert sich durch Anwendung von O das Gewicht um eine Einheit, so dass das Gewicht von $O^{w+1}\varphi$ gleich $2w + 1$ wäre, was nicht vorkommen kann.

[1]) Vergl. HILBERT, Diss., sowie Math. Ann. **30**, p. 15.

11. In seiner „Algebra of Quantics“[1]) hat dann ELLIOTT (10, 1) und (10, 2) auf die folgenden Produktformen gebracht:

$$(11,1)\quad K = \left(1-\frac{O\,\Omega}{1\cdot 2}\right)\left(1-\frac{O\,\Omega}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{O\,\Omega}{3\cdot 4}\right)\cdots\left(1-\frac{O\,\Omega}{n(n-1)}\right) q$$

$$(11,2)\quad K' = \left(1-\frac{\Omega O}{1\cdot 2}\right)\left(1-\frac{\Omega O}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{\Omega O}{3\cdot 4}\right)\cdots\left(1-\frac{\Omega O}{n(n-1)}\right) q\,.$$

Ein Beweis für die ELLIOTT'schen Produktdarstellungen wird sich als Spezialfall aus unseren spätern Betrachtungen ergeben.

12. *Die Story'schen Formeln.* Die HILBERT'schen Untersuchungen sind dann später von STORY im n-nären Gebiet erfolgreich fortgesetzt worden. Die Prozesse, die (10, 1) und (10, 2) analog sind, erscheinen in der von STORY gegebenen Darstellung komplizierter, da die Anzahl der Differential-Operatoren mit q zunimmt. Es sei hier der STORY'sche Weg kurz skizziert (STORY, p. 485).

Wir wollen wiederum Polynome der Koeffizienten und Variablen einer n-nären Form, die allen Homogenitäts- und Isobaritätseigenschaften genügen (vergl. Nr. 2) als *Gradienten* bezeichnen. STORY sucht nun aus gegebenen Gradienten Kovarianten und Invarianten zu berechnen.

Es seien $x, \ldots u$ die q—1 ersten Variablen, v die q—*te*.

STORY nimmt an, dass *ein Gradient* q *bereits durch* $\widehat{yx}, \widehat{zx}, \ldots \widehat{ux}$ *zum Verschwinden gebracht wird, aber eventuell noch nicht durch* $\widehat{vx}$. Auf diesen Gradienten q wendet nun STORY den folgenden Prozess $Q\,\varphi$ an:

$$(12,1)\qquad Q\,\varphi \equiv \nu! \sum_{(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\varepsilon=\sigma)} \frac{(-1)^\sigma}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\cdots\varepsilon!\,(\sigma+\nu)!}\, \widehat{xv}^\alpha \widehat{yv}^\beta \widehat{zv}^\gamma \cdots$$
$$\widehat{uv}^\varepsilon \widehat{vu}^\varepsilon \cdots \widehat{vz}^\gamma \widehat{vy}^\beta \widehat{vx}^\alpha q\,,\quad \nu = q-1\,.$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon$ ganze, nicht negative Zahlen sind, und beweist, dass $Q\,\varphi$ nicht nur wiederum durch $\widehat{yx}, \widehat{zx}, \ldots \widehat{ux}$, sondern nunmehr auch durch Anwendung von $\widehat{vx}$ verschwindet. Den Prozess Q bezeichnet STORY auch mit dem Symbol:

$$(12,2)\qquad Q\,\varphi \equiv \{x, y, z, \ldots u; v\}\, q\,.$$

Daraus folgt, dass aus einem Gradienten durch Anwendung des folgenden Prozesses:

$$(12,3)\qquad K = \{x, y, z, \ldots; t\} \cdots \{x, y; z\}\{x; y\}\, q$$

[1]) ELLIOTT, p. 197, vergl. hierzu die Darstellung bei DICKSON, p. 30.

stets eine Kovariante entsteht. Daneben führt aber STORY auch noch den folgenden zu Q symmetrischen Prozess Q^* ein:

$$(12,4) \qquad Q^*\varphi = \nu!\sum \frac{(-1)^\sigma}{\alpha!\beta!\gamma!\cdots\varepsilon!(\sigma+\nu)!}\,\widehat{vx}^\alpha\widehat{vy}^\beta\widehat{vz}^\gamma\cdots \widehat{vu}^\varepsilon\widehat{uv}^\varepsilon\cdots\widehat{zv}^\gamma\widehat{yv}^\beta\widehat{xv}^\alpha\varphi,$$

der hier mit $\{v\,;u,\ldots z,y,x\}$ bezeichnet wird und zeigt auch, dass dieser Prozess genau die analogen Eigenschaften wie Q hat, so dass auch der folgende Ausdruck eine mit Hülfe von Q^* hergeleitete Kovariante ist:

$$(12,5) \qquad K^* = \{t;\ldots z,y,x\}\cdots\{z;y,x\}\{y;x\}\varphi.$$

13. *Formulierung der Fragestellung und der Resultate der Abhandlung.* In seiner Arbeit wirft nun STORY die Frage auf, ob die beiden Kovarianten:

$$(13,1) \qquad [\varphi]_1 = \{x,y,z,\ldots;t\}\cdots\{x,y;z\}\{x;y\}\varphi$$

und

$$(13,2) \qquad [\varphi]' = \{t;\ldots z,y,x\}\cdots\{z;y,x\}\{y;x\}\varphi$$

mit einander identisch seien oder nicht. Er schreibt darüber p. 489, Fussnote: „In the case of two variables it appears that $[\varphi]_1$ and $[\varphi]'$ are identical if φ is of one and the same weight relatively to the variables; but in the case of more than two variables we have not proved the identity of the two operators defined by ... Wir werden dieses Problem hier entscheiden, und zwar im bejahenden Sinne. Zu dem Zweck werden wir im folgenden die beiden STORY'schen Operatoren in Produkte umformen, die eine Verallgemeinerung der im binären Falle angeführten ELLIOTT'schen Produkte sind. Diese beiden Produktdarstellungen dürften auch prinzipiell selbständiges Interesse besitzen, da sie wesentlich einfacher und übersichtlicher sind als die STORY'schen Summenausdrücke.

Es sei φ ein Gradient, der durch $\widehat{yx}, \widehat{zx}, \ldots \widehat{ux}$, aber eventuell nicht durch $\widehat{vx}$ zum Verschwinden gebracht wird. Dann lauten unsere beiden Produktformeln:

$$(13,3) \qquad Q\varphi = \prod_{\sigma=1}^{\nu}\left(1-\frac{\Delta}{\sigma(\sigma+\nu)}\right)\varphi,$$

wo $\nu = q-1$ und $\Delta = \widehat{xv}\,\widehat{vx} + \widehat{yv}\,\widehat{vy} + \cdots + \widehat{uv}\,\widehat{vu}$ ist,

und

$$(13,4) \qquad Q^* \varphi = \prod_{\sigma=1}^{w} \left(1 - \frac{\Delta^*}{\sigma\,(\sigma+\nu)}\right) \varphi\,, \quad \nu = q - 1$$

$$\Delta^* = \widehat{v\,x}\,\widehat{x\,v} + \widehat{v\,y}\,\widehat{y\,v} + \cdots + \widehat{v\,u}\,\widehat{u\,v}\,.$$

Beim Beweise beweisen wir zugleich zwei Formeln, die viel allgemeiner sind als (13, 3) und (13, 4). Brechen wir nämlich in (12, 1) $Q\varphi$ mit den Gliedern, deren $\sigma = s$ ist, ab und bezeichnen wir dann die übrigbleibende Summe mit $Q_s \varphi$, bezw. $Q_s^* \varphi$, also z. B.:

$$(13,5) \qquad Q_s \varphi = \nu! \sum_{(\alpha+\beta+\cdots+\varepsilon=\sigma\le s)} \frac{(-1)^\sigma}{\alpha!\,\beta!\cdots\varepsilon!\,(\sigma+\nu)!}\ \widehat{x\,v}^\alpha\,\widehat{y\,v}^\beta \cdots$$
$$\widehat{u\,v}^\varepsilon\,\widehat{v\,u}^\varepsilon \cdots \widehat{v\,y}^\beta\,\widehat{v\,x}^\alpha\,\varphi\,,$$

so ist:

$$(13,6) \qquad Q_s \varphi = \prod_{\sigma=1}^{s} \left(1 - \frac{\Delta}{\sigma\,(\sigma+\nu)}\right) \varphi$$

und ebenso gilt:

$$(13,7) \qquad Q_s^* \varphi = \prod_{\sigma=1}^{s} \left(1 - \frac{\Delta^*}{\sigma\,(\sigma+\nu)}\right) \varphi\,.$$

Diese beiden Formeln werden wir nun mit Hilfe der vollständigen Induktion herleiten. Ist dann s genügend gross, $s \geqq w$, so ergeben sich die beiden Produktformeln (13, 3) und (13, 4).

In der Formulierung und dem Beweise der Formeln (13, 3) und (13, 4) erblicken wir das Hauptergebnis unserer Arbeit.

II. Kapitel.

Herleitung der Produktformeln.

14. *Vorbemerkungen.* Wir werden die Formeln (13, 6) und (13, 7) zu Nr. 16 für $s = 1$ herleiten und alsdann die Methode der vollständigen Induktion anwenden, indem wir zeigen, dass wenn (13, 6) und (13, 7) für $s = r$ richtig sind, sie auch für $s = r + 1$ richtig sind.

Wir wollen im folgenden die Variablen $x, y, z, \ldots u$ mit $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{q-1}$ und einen Operator von der Form:

(14, 0) $$\widehat{x_1 v}^{\alpha_1}\widehat{x_2 v}^{\alpha_2}\cdots\widehat{x_{q-1} v}^{\alpha_{q-1}}\widehat{v x}_{q-1}^{\alpha_{q-1}}\cdots\widehat{v x}_2^{\alpha_2}\widehat{v x}_1^{\alpha_1}$$

mit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})$ bezeichnen. Analog setzen wir:

$$\widehat{v x}_1^{\alpha_1}\widehat{v x}_2^{\alpha_2}\cdots\widehat{v x}_{q-1}^{\alpha_{q-1}}\widehat{x_{q-1} v}^{\alpha_{q-1}}\cdots\widehat{x_2 v}^{\alpha_2}\widehat{x_1 v}^{\alpha_1} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})^*.$$

Nach Formeln 5b) und 5c), p. 8 ist dann stets:

(14, 1) $$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1}) = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots \alpha_{i_{q-1}}),$$

wo $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots \alpha_{i_{q-1}}$ eine beliebige Permutation der $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1}$ ist.

15. *Gewicht und Exponentensumme.* Es sei φ ein Gradient mit dem Gewicht $w_{x_1} = w_{x_2} \cdots = w_v$, und es möge auf ihn Q (siehe Formel (12, 1), p. 10) angewandt werden. Wir wollen zuerst zeigen, dass zur Berechnung von $K = Q\varphi$ nur die Glieder von Q, deren Exponentensumme $\sigma \leqq w$ ist, in Betracht kommen, da alle andern Glieder φ zum Verschwinden bringen. Mit andern Worten, wir behaupten den

Hilfssatz: ist $T = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})\varphi$ *mit* $t = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{q-1} > w_v$, *so ist* $T\varphi \equiv 0$.

Wird nämlich auf φ $\widehat{v x}_r$ angewendet, so wird nach 4, p. 8, w_v um 1 kleiner. Durch $\widehat{v x}_{q-1}^{\alpha_{q-1}}\cdots\widehat{v x}_2^{\alpha_2}\widehat{v x}_1^{\alpha_1}$ würde w_v um $t = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{q-1}$ abnehmen, also < 0 werden, so dass $\widehat{v x}_{q-1}^{\alpha_{q-1}}\cdots\widehat{v x}_2^{\alpha_2}\widehat{v x}_1^{\alpha_1}\varphi \equiv 0$ sein muss, w.z.b.w.

Die Summe der Glieder von Q, für die $\sum_{i=1}^{q-1}\alpha_i \leqq \sigma$ ist, bezeichnen wir allgemein mit Q_σ. Somit erhalten wir:

(15, 1) $$K = Q\varphi \equiv Q_{w_v}\varphi.$$

Entsprechend gilt auch für die Anwendung des Operators Q^* auf unsern Gradienten φ:

(15, 2) $$K^* = Q^*\varphi \equiv Q^*_{w_v^*}\varphi.$$

Es gilt nämlich für $t = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{q-1} > w_v^*$,

$$\widehat{v x}_1^{\alpha_1}\widehat{v x}_2^{\alpha_2}\cdots\widehat{v x}_{q-1}^{\alpha_{q-1}}\widehat{x_{q-1} v}^{\alpha_{q-1}}\cdots\widehat{x_2 v}^{\alpha_2}\widehat{x_1 v}^{\alpha_1}\varphi \equiv$$

$$\equiv \widehat{v x}_1^{\alpha_1}\widehat{v x}_2^{\alpha_2}\cdots\widehat{v x}_{q-1}^{\alpha_{q-1}}(\widehat{x_{q-1} v}^{\alpha_{q-1}}\cdots\widehat{x_2 v}^{\alpha}\widehat{x_1 v}^{\alpha_1}\varphi),$$

wo für den Ausdruck in der Klammer das *Ergänzungsgewicht* negativ werden müsste, da bei der Anwendung eines Operators von der Form $x_{q-1}v \cdots x_2 v\, x_1 v$, das Ergänzungsgewicht jedesmal um 1 vermindert wird (vergl. 4, p. 8). Daher muss der Klammerausdruck verschwinden.

16. Wie schon betont, soll Q im folgenden nur auf Gradienten angewendet werden, für die

$$(16,1) \qquad x_2 x_1 \varphi \equiv 0,\ x_3 x_1 \varphi \equiv 0, \ldots x_{q-1} x_1 \varphi \equiv 0$$

ist. Wenden wir dann auf φ die Glieder der ersten STORY'schen Formel an, für die $\sigma \leqq 1$ ist, so erhalten wir:

$$\left(1 - \frac{\nu!\,(x_1 v\, v x_1 + x_2 v\, v x_2 + \cdots + x_{q-1} v\, v x_{q-1})}{(\nu-1)!}\right)\varphi \quad \left(1 - \frac{\Delta}{\nu-1}\right)\varphi .$$

Dies ist bereits Q_1 für $s = 1$.

Dasselbe gilt auch ohne weiteres für den Operator Q^*, sofern er auf die Gradienten ψ angewandt wird, für die

$$(16,2) \qquad x_1 x_2 \psi \equiv 0,\ x_1 x_3 \psi \equiv 0, \ldots x_1 x_{q-1} \psi \equiv 0$$

ist.

17. *Der Schluss von r auf $r+1$. Formulierung der Behauptung.* Es sei φ ein Gradient, für den (16,1) gilt. Unser Gradient verschwindet dann auch für jeden Operator, der aus zwei der Variablen $x_1, x_2, \ldots x_{q-1}$ zusammengesetzt ist, wie z. B. $x_2 x_3$, $x_4 x_5$, $x_1 x_5$, usw., eine Tatsache, auf die wir uns öfters berufen werden.

Es gelte nun die Produktformel für $s \leqq r$, wir haben sie dann für $s = r+1$ zu beweisen.

Es sei also:

$$Q_r \varphi = \left(1 - \frac{\Delta}{1(\nu+1)}\right)\left(1 - \frac{\Delta}{2(\nu+2)}\right)\cdots\left(1 - \frac{\Delta}{r(r+\nu)}\right)\varphi ,$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{q-1} x_i v\, v x_i ,$$

und es soll bewiesen werden, dass

$$\prod_{\sigma=1}^{r+1}\left(1 - \frac{\Delta}{\sigma(\sigma+\nu)}\right)\varphi = Q_r\left(1 - \frac{\Delta}{(r+1)(r+\nu+1)}\right)\varphi =$$

$$= Q_r \varphi - Q_r \frac{\Delta}{(r+1)(r+\nu+1)}\varphi = Q_{r+1}\varphi ,$$

d. h. mit andern Worten

$$(17,1) \qquad -Q_r \frac{\Delta}{(r+1)(r+\nu+1)} \varphi =$$

$$= \sum_{\left(\sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i \quad r-1\right)} \frac{\nu!\,(-1)^{r+1}}{\alpha_1!\,\alpha_2! \cdots \alpha_{q-1}!\,(r+\nu+1)!} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})\, \varphi$$

ist. Ebenso lautet die für Q^* zu beweisende Formel:

$$(17,2) \qquad -Q_r^* \cdot \frac{\Delta^*}{(r+1)(r+\nu+1)} \varphi =$$

$$\equiv \sum_{\left(\sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i \quad r-1\right)} \frac{\nu!\,(-1)^{r+1}}{\alpha_1!\,\alpha_2! \cdots \alpha_{q-1}!\,(r+\nu+1)!} (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})^*\, \varphi .$$

18. *Herleitung zweier Hilfsformeln.* Aus der Bedingung (16,1) folgt allgemein:

$$(18,1) \qquad \widehat{x_i x_k}\, \varphi \equiv 0, \quad i, k = 1, 2, \ldots q-1.$$

Zum Beweis der Formeln (17,1) und (17,2) leiten wir in den Nummern 18—25 zwei Formeln ab, die wir später benützen werden. Erstens:

$$(18,2) \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_{q-1})\, \widehat{x_i v}\, \widehat{v x_i}\, \varphi \equiv$$
$$\equiv (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}, \alpha_i + 1, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_{q-1})\, \varphi$$
$$+ s\,(\alpha_i + 1)\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_{q-1})\, \varphi, \quad s = \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i,$$

d. h., multiplizieren wir einen Operator von der Form $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})\varphi$ mit dem Produkt der beiden Operatoren $\widehat{x_i v}$ und $\widehat{v x_i}$, so erhalten wir einen neuen Operator derselben Form, bei dem der Exponent von $\widehat{x_i v}$ und $\widehat{v x_i}$ um 1 grösser geworden ist, plus dem alten Operator multipliziert mit $s(\alpha_i + 1)$.

Zweitens ganz analog:

$$(18,3) \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_{q-1})^* \widehat{v x_i}\, \widehat{x_i v}\, \varphi \equiv$$
$$\equiv (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}, \alpha_i + 1, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_{q-1})^* \varphi +$$
$$+ s\,(\alpha_i + 1)\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_{q-1})^* \varphi .$$

19. *Der erste Schritt der Umformung.* Da $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})$ in bezug auf $x_1, x_2, \ldots x_{q-1}$ symmetrisch ist, genügt es, (18,2) und (18,3) für $i = 1$ zu beweisen. Für $i = 1$ lauten aber die beiden Formeln (18,2) und (18,3):

$$(19,1)\quad (\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_{q-1})\,\widehat{x_1 v}\,\widehat{v x_1}\,\varphi \equiv (\alpha_1+1,\alpha_2,\dots\alpha_{q-1})\,\varphi + \\ + s(\alpha_1+1)(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_{q-1})\,\varphi$$

und:

$$(19^*,1)\qquad (\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_{q-1})^*\widehat{v x_1}\,\widehat{x_1 v}\,\varphi \equiv \\ \equiv (\alpha_1+1,\alpha_2,\dots\alpha_{q-1})^*\varphi + s(\alpha_1+1)(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_{q-1})^*\varphi,$$

die nun zu beweisen sind.

Nun hat das Produkt $(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_{q-1})\,\widehat{x_1 v}\,\widehat{v x_1}\,\varphi$ die Form:

$$\widehat{x_1 v}^{\alpha_1}\,\widehat{x_2 v}^{\alpha_2}\cdots\widehat{x_{q-1} v}^{\alpha_{q-1}}\,\widehat{v x_{q-1}}^{\alpha_{q-1}}\cdots\widehat{v x_2}^{\alpha_2}\,\widehat{v x_1}^{\alpha_1}\,\widehat{x_1 v}\,\widehat{v x_1}\,\varphi.$$

Wir können dies auch in der Form schreiben:

$$(19,2)\qquad B_1\,\widehat{v x_1}^{\alpha_1}\,\widehat{x_1 v}\,\widehat{v x_1}\,\varphi$$

mit

$$(19,3)\quad B_1 = \widehat{x_1 v}^{\alpha_1}\,\widehat{x_2 v}^{\alpha_2}\cdots\widehat{x_{q-1} v}^{\alpha_{q-1}}\,\widehat{v x_{q-1}}^{\alpha_{q-1}}\cdots\widehat{v x_3}^{\alpha_3}\,\widehat{v x_2}^{\alpha_2}.$$

Wir vertauschen nun in (19, 2) zuerst $\widehat{v x_1}^{\alpha_1}$ mit $\widehat{x_1 v}$ und erhalten nach Formel 5d), p. 8:

$$(19,4)\quad B_1\,\widehat{v x_1}^{\alpha_1}\,\widehat{x_1 v}\,(\widehat{v x_1}\,\varphi) \equiv B_1\,\widehat{x_1 v}\,\widehat{v x_1}^{\alpha_1}\,(\widehat{v x_1}\,\varphi) - \\ - B_1\,\alpha_1\,(w^*_{x_1} - w^*_v - \alpha_1 + 1)\,\widehat{v x_1}^{\alpha_1}\,(\widehat{v x_1}\,\varphi).$$

Nun ist φ ein Gradient, für den $w^*_{x_1} - w^*_v$ ist. Durch $\widehat{v x_1}$ wird aber $w^*_{x_1}$ um 1 kleiner, w^* um 1 grösser: folglich ist für $\widehat{v x_1}\,\varphi$ die Differenz: $w^*_{x_1} - w^*_v - 2$. So erhalten wir aus der Formel (19, 2):

$$(19,4_1)\quad B_1\,\widehat{v x_1}^{\alpha_1}\,\widehat{x_1 v}\,(\widehat{v x_1}\,\varphi) \equiv B_1\,\widehat{x_1 v}\,\widehat{v x_1}^{\alpha_1}(\widehat{v x_1}\,\varphi) + \\ + \alpha_1(\alpha_1+1)\,B_1\,\widehat{v x_1}^{\alpha_1-1}\,(\widehat{v x_1}\,\varphi) \\ \equiv A_2 + \alpha_1(\alpha_1+1)\,(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_{q-1})\,\varphi,$$

wo

$$(19,5)\qquad A_2 = B_1\,\widehat{x_1 v}\,\widehat{v x_1}^{\alpha_1+1}\,\varphi$$

ist.

Analog formen wir die linke Seite von $(19^*,1)$

$$\widehat{v x_1}^{\alpha_1}\,\widehat{v x_2}^{\alpha_2}\cdots\widehat{v x_{q-1}}^{\alpha_{q-1}}\,\widehat{x_{q-1} v}^{\alpha_{q-1}}\cdots\widehat{x_2 v}^{\alpha_2}\,\widehat{x_1 v}^{\alpha_1}\,\widehat{v x_1}\,\widehat{x_1 v}\,\varphi$$

um. Wir setzen dafür:

$$(19^*,2)\qquad B_1^*\,\widehat{x_1 v}^{\alpha_1}\,\widehat{v x_1}\,\widehat{x_1 v}\,\varphi,$$

wo

$$(19^*3)\qquad B_1^* = \widehat{r\,x_1}^{\alpha_1}\,\widehat{r\,x_2}^{\alpha_2}\cdots\widehat{r\,x_{q-1}}^{\alpha_{q-1}}\,\widehat{x_{q-1}\,r}^{\alpha_{q-1}}\cdots\widehat{x_3 v}^{\alpha_3}\,\widehat{x_2 r}^{\alpha_2}$$

bedeutet. Wieder vertauschen wir nach Formel 5d), p. 8, in (19*2) $\widehat{x_1 v}^{\alpha_1}$ mit $\widehat{v\,x_1}$ und erhalten:

$$B_1^*\,\widehat{x_1 v}^{\alpha_1}\,\widehat{v\,x_1}\,(\widehat{x_1 v}\;\varphi) = B_1^*\,\widehat{v\,x_1}\,\widehat{x_1 v}^{\alpha_1}\,(\widehat{x_1 v}\;\varphi) - \\ -\alpha\,(w_v^* - w_{x_1}^* - \alpha_1 + 1)\,\widehat{x_1 v}^{\alpha_1-1}\,(\widehat{x_1 v}\;\varphi).$$

Durch Anwendung von $\widehat{x_1 r}$ wird aber w_r^* um 1 vermindert, $w_{x_1}^*$ um 1 vergrössert, folglich ist: $w_v^* - w_{x_1}^* = -2$; deshalb gilt:

$$(19^*4)\qquad B_1^*\,\widehat{x_1 v}^{\alpha_1}\,\widehat{v\,x_1}\,(\widehat{x_1 v}\;\varphi) \equiv B_1^*\,\widehat{v\,x_1}\,\widehat{x_1 v}^{\alpha_1}\,(\widehat{x_1 v}\;\varphi) + \\ + \alpha_1\,(\alpha_1+1)\,B_1^*\,\widehat{x_1 v}^{\alpha_1-1}\,(\widehat{x_1 v}\;\varphi) \\ \equiv A_2^* + \alpha_1\,(\alpha_1+1)\,(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_{q-1})^*\,\varphi,$$

wo

$$(19^*5)\qquad A_2^* = B_1^*\,\widehat{v\,x_1}\,\widehat{x_1 v}^{\alpha_1+1}\,\varphi$$

ist.

20. *Ausdrücke* B_k, B_k^* *und* D_k, D_k^*. Wir führen analog zu B_1 und B_1^* die Operatoren $B_2, \ldots B_{q-1}$, $B_2^*, \ldots B_{q-1}^*$ ein, indem wir sukzessive setzen:

$$\left.\begin{aligned}(20,1)\qquad & B_{k-1} = B_k\,\widehat{v\,x_k}^{\alpha_k}\\ (20^*1)\qquad & B_{k-1}^* = B_k^*\,\widehat{x_k v}^{\alpha_k}\end{aligned}\right\}\ k = 2,\ldots q-1.$$

Dann ist allgemein:

$$(20,2)\qquad B_k = \widehat{x_1 v}^{\alpha_1}\cdots\widehat{x_{q-1} v}^{\alpha_{q-1}}\,\widehat{v\,x_{q-1}}^{\alpha_{q-1}}\cdots\widehat{v\,x_{k+2}}^{\alpha_{k+2}}\,\widehat{v\,x_{k+1}}^{\alpha_{k+1}},$$
$$k = 1,2,\ldots q-2,$$
$$B_{q-1} = \widehat{x_1 v}^{\alpha_1}\cdots\widehat{x_{q-1} v}^{\alpha_{q-1}},$$

bzw. $$(20^*2)\qquad B_k^* = \widehat{v\,x_1}^{\alpha_1}\cdots\widehat{v\,x_{q-1}}^{\alpha_{q-1}}\,\widehat{x_{q-1} v}^{\alpha_{q-1}}\cdots\widehat{x_{k+2} v}^{\alpha_{k+2}}\,\widehat{x_{k+1} v}^{\alpha_{k+1}},$$
$$k = 1,2,\ldots q-2,$$
$$B_{q-1}^* = \widehat{v\,x}_1^{\alpha_1}\ldots\widehat{v\,x_{q-1}}^{\alpha_{q-1}}.$$

Neben B_k, B_k^* führen wir die Operatoren D_k, D_k^* ein:

$$\left.\begin{aligned}(20,3)\qquad & D_k = \widehat{v\,x_{k-1}}^{\alpha_{k-1}}\cdots\widehat{v\,x_2}^{\alpha_2}\\ (20^*3)\qquad & D_k^* = \widehat{x_{k-1} v}^{\alpha_{k-1}}\cdots\widehat{x_3 v}^{\alpha_3}\,\widehat{x_2 v}^{\alpha_2}\end{aligned}\right\}\ k = 3,4,\ldots q-1,$$

und $$D_2 = 1, \quad D_2^* = 1.$$

Es gilt offenbar für D_k, D_k^* die folgende Formel:

$$\left.\begin{aligned} &(20,4) \quad \widehat{v\,x_k}^{\alpha_k} D_k = D_{k+1}, \\ &(20^*,4) \quad \widehat{x_k v}^{\alpha_k} D_k^* = D_{k+1}^*, \end{aligned}\right\} \quad k = 2, 3, \ldots q-2.$$

Über das Rechnen mit D_k, D_k^* bemerken wir folgendes:

a) Es gilt:

$$(20,5) \qquad \widehat{x_1 x_k}\, D_k = D_k\, \widehat{x_1 x_k},$$
$$(20^*,5) \qquad \widehat{x_k x_1}\, D_k^* = D_k^*\, \widehat{x_k x_1};$$

denn $\widehat{x_1 x_k}$ resp. $\widehat{x_k x_1}$ darf nach Formel 5a), p. 8, ohne weiteres mit jedem Faktor von D_k resp. D_k^* vertauscht werden.

b) Es gilt:

$$(20,6) \qquad \widehat{v\,x_k}\, D_k\, \widehat{v\,x_1}^{\alpha_1} = D_k\, \widehat{v\,x_1}^{\alpha_1}\, \widehat{v\,x_k},$$
$$(20^*,6) \qquad \widehat{x_k v}\, D_k^*\, \widehat{x_1 v}^{\alpha_1} = D_k^*\, \widehat{x_1 v}^{\alpha_1}\, \widehat{x_k v};$$

denn ein beliebiger Operator $\widehat{v\,x_k}$ resp. $\widehat{x_k v}$ darf nach Formel 5b), p. 8, resp. 5c), p. 8 mit jedem Operator von der Form $\widehat{v\,x_k}$ bzw. $\widehat{x_k v}$ vertauscht werden.

c) Endlich folgt aus der Formel 5f), p. 8:

$$(20,7) \quad D_k \widehat{x_1 x_k} \widehat{v\,x_1}^{\alpha_1 - 1} \varphi = D_k \widehat{v\,x_1}^{\alpha_1 - 1} \widehat{x_1 x_k} \varphi - D_k (\alpha_1 + 1) \widehat{v\,x_1}^{\alpha_1} \widehat{v\,x_k} \varphi,$$

sowie aus Formel 5e), p. 8:

$$(20^*,7) \quad D_k^* \widehat{x_k x_1} \widehat{x_1 v}^{\alpha_1 + 1} \varphi = D_k^* \widehat{x_1 v}^{\alpha_1 + 1} \widehat{x_k x_1} \varphi - D_k^* (\alpha_1 + 1) \widehat{x_1 v}^{\alpha_1} \widehat{x_k v} \varphi.$$

21. *Ausdrücke F_k und F_k^*.* Wir definieren ferner die Ausdrücke F_k, resp. F_k^*:

$$\left.\begin{aligned} &(21,1) \quad F_k = B_k\, \widehat{v\,x_k}^{\alpha_{k-1}} D_k\, \widehat{v\,x_1}^{\alpha_1}\, \widehat{v\,x_k}\, \varphi, \\ &(21^*,1) \quad F_k^* = B_k^*\, \widehat{x_k v}^{\alpha_{k-1}} D_k^*\, \widehat{x_1 v}^{\alpha_1}\, \widehat{x_k v}\, \varphi, \end{aligned}\right\} \quad k = 2, \ldots q-1.$$

Nach Formel (20, 6) dürfen wir das in F_k an letzter Stelle stehende $\widehat{v\,x_k}$ ohne weiteres mit $D_k\, \widehat{v\,x_1}^{\alpha_1}$ vertauschen, daher gilt:

$$(21,2) \qquad F_k = B_k\, \widehat{v\,x_k}^{\alpha_k} D_k\, \widehat{v\,x_1}^{\alpha_1} \varphi, \quad k = 2, \ldots q-1,$$

und ebenso, wenn (20*, 6) auf F_k^* angewandt wird:

$$(21^*,2) \qquad F_k^* = B_k^*\, \widehat{x_k v}^{\alpha_k} D_k^*\, \widehat{x_1 v}^{\alpha_1} \varphi.$$

Setzen wir in diese Ausdrücke von F_k, F_k^* für B_k, B_k^* und D_k, D_k^* die Werte aus (20, 2) und (20, 3) bzw. (20*, 2) und (20*, 3) ein, so erhalten wir nach (14, 0):

$$\left.\begin{array}{ll} (21,3) & F_k = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})\,\varphi \\ (21^*,3) & F_k^* = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})^*\,\varphi \end{array}\right\} k = 2, 3, \ldots q-1.$$

22. *Operatoren* C_k, C_k^*. Als C_k, C_k^* definieren wir:

$$\left.\begin{array}{ll} (22,1) & C_k = \alpha_k B_k \widehat{v x_k}^{\alpha_k - 1} \widehat{x_1 x_k} D_k \widehat{v x_1}^{\alpha_1+1} \varphi \\ (22^*,1) & C_k^* = \alpha_k B_k^* \widehat{x_k v}^{\alpha_k - 1} \widehat{x_k x_1} D_k^* \widehat{x_1 v}^{\alpha_1+1} \varphi \end{array}\right\} k = 2, \ldots q-1.$$

Nach (20, 5) dürfen wir $\widehat{x_1 x_k}$ in C_k mit D_k vertauschen; dann ist

$$(22,2) \qquad C_k = \alpha_k B_k \widehat{v x_k}^{\alpha_k - 1} D_k \widehat{x_1 x_k} \widehat{v x_1}^{\alpha_1+1} \varphi$$

Vertauschen wir in (22, 2) $\widehat{x_1 x_k}$ mit $\widehat{v x_1}^{\alpha_1+1}$, so erhalten wir nach (20, 7):

$$\begin{aligned} (22,3) \qquad C_k = {} & \alpha_k B_k \widehat{v x_k}^{\alpha_k - 1} D_k \widehat{v x_1}^{\alpha_1+1} \widehat{x_1 x_k}\,\varphi + \\ & + \alpha_k (\alpha_1 + 1)\, B_k \widehat{v x_k}^{\alpha_k - 1} D_k \widehat{v x_1}^{\alpha_1} \widehat{v x_k}\,\varphi. \end{aligned}$$

Das erste Glied auf der rechten Seite in (22, 3) verschwindet, weil nach (18, 1) $\widehat{x_1 x_k}\,\varphi \equiv 0$ ist; das zweite Glied ist aber nach der Definition (21, 1) von F_k gleich $\alpha_k(\alpha_1 + 1) F_k$. Folglich erhalten wir:

$$(22,4) \qquad C_k = \alpha_k (\alpha_1 + 1)(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})\,\varphi,\ k = 2, 3, \ldots q-1.$$

Durch Anwendung von (20*, 5) erhalten wir für C_k^* wie oben:

$$(22^*,2) \qquad C_k^* = \alpha_k B_k^* \widehat{x_k v}^{\alpha_k - 1} D_k^* \widehat{x_k x_1}\, \widehat{x_1 v}^{\alpha_1+1}\,\varphi.$$

In C_k^* vertauschen wir nach (20*, 7) $\widehat{x_1 v}^{\alpha_1+1}$ mit $\widehat{x_k x_1}$ und erhalten:

$$\begin{aligned} (22^*,3) \qquad C_k^* = {} & \alpha_k B_k^* \widehat{x_k v}^{\alpha_k - 1} D_k^* \widehat{x_1 v}^{\alpha_1+1} \widehat{x_k x_1}\,\varphi - \\ & - (\alpha_1 + 1)\,\alpha_k B_k^* \widehat{x_k v}^{\alpha_k - 1} D_k^* \widehat{x_1 v}^{\alpha_1} \widehat{x_k v}\varphi. \end{aligned}$$

Das erste Glied in (22*, 3) verschwindet nach (18, 1); das zweite Glied ist aber nach (21*, 1) gleich $\alpha_k(\alpha_1 + 1) F_k$; somit folgt:

$$(22^*,4) \qquad C_k^* = -\alpha_k(\alpha_1 + 1)(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})\,\varphi, k = 2, 3, \ldots q-1.$$

23. *Die Ausdrücke* A_k *und* A_k^*. Schliesslich führen wir noch die Grössen A_k ein:

$$(23,1) \qquad A_k = B_k \widehat{v x^{\alpha_k}}\, \widehat{x_1 v} D_k \widehat{v x_1}^{\alpha_1+1} \varphi,\ k = 2, 3, \ldots q-1.$$

Wegen $B_2 \widehat{v x_2^{\alpha_2}} \quad B_1$ deckt sich dies für $k=2$ mit A_2 in (19, 4ı).
A_q aber sei:

$$(23,2) \qquad A_q = B_{q-1}\, \widehat{x_1 v}\, \widehat{v x_{q-1}^{\alpha_{q-1}}}\, D_{q-1}\, \widehat{v x_1^{\alpha_1-1}}\, \varphi .$$

Nach den Formeln (20, 1) und (20, 2) können wir für $k=2, \ldots q-2$ schreiben:

$$(23,2_1) \qquad A_{k+1} = B_{k+1}\, \widehat{v x_{k+1}^{\alpha_{k+1}}}\, \widehat{x_1 v}\, D_{k+1}\, \widehat{v x_1^{\alpha_1+1}}\, \varphi =$$
$$= B_k\, \widehat{x_1 v}\, \widehat{v x_k^{\alpha_k}}\, D_k\, \widehat{v x_1^{\alpha_1+1}}\, \varphi .$$

Nach (23, 2) gilt dies aber auch für $k=q-1$, so dass

$$(23,3) \qquad A_{k+1} = B_k\, \widehat{x_1 v}\, \widehat{v x_k^{\alpha_k}}\, D_k\, \widehat{v x_1^{\alpha_1+1}}\, \varphi \text{ für } k=2,3,\ldots q-1.$$

Ebenso sei:

$$(23^*,1) \qquad A^*_{k+1} = B^*_k\, \widehat{x_k v^{\alpha_k}}\, \widehat{v x_1}\, D^*_k\, \widehat{x_1 v^{\alpha_1+1}}\, \varphi, \quad k=2,3,\ldots q-1.$$

A^*_q sei wieder:

$$(23^*,2) \qquad A^*_q = B^*_{q-1}\, \widehat{v x_1}\, \widehat{x_{q-1} v^{\alpha_{q-1}}}\, D^*_{q-1}\, \widehat{x_1 v^{\alpha_1-1}} \varphi .$$

Dann gilt für A^*_{k-1} analog wie oben, vermöge der Gleichungen (20*, 1) und (20*, 4):

$$A^*_{k+1} = B^*_{k+1}\, \widehat{x_{k+1} v^{\alpha_{k+1}}}\, \widehat{v x_1}\, D^*_{k+1}\, \widehat{x_1 v^{\alpha_1+1}}\, \varphi =$$
$$= B^*_k\, \widehat{v x_1}\, \widehat{x_k v^{\alpha_k}}\, D^*_k\, \widehat{x_1 v^{\alpha_1+1}}\, \varphi, \qquad k=2,3,\ldots q-2.$$

Nach Formel (23*, 2) gilt dies auch für $k=q-1$, so dass nunmehr gilt:

$$(23^*,3) \quad A^*_{k+1} = B^*_k\, \widehat{v x_1}\, \widehat{x_k v^{\alpha_k}}\, D^*_k\, \widehat{x_1 v^{\alpha_1-1}}\, \varphi, \text{ für } k=2,3,\ldots q-1.$$

24. *Rekursionsformeln für A_k und A^*_k. Nun gilt allgemein:*

$$(24,1) \quad A_k = A_{k+1} + \alpha_k (\alpha_1+1)(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})\, \varphi, \quad k=2,\ldots q-1.$$

Wir vertauschen zum Beweis von (24, 1) $\widehat{x_1 v}$ mit $\widehat{v x_k^{\alpha_k}}$ im Ausdruck (23, 1) von A_k. Da nach Formel 5e), p. 8:

$$(24,2) \qquad \widehat{v x_k^{\alpha_k}}\, \widehat{x_1 v} = \widehat{x_1 v}\, \widehat{v x_k^{\alpha_k}} + \alpha_k\, \widehat{v x_k^{\alpha_k-1}}\, \widehat{x_1 x_k}$$

ist, so erhalten wir für A_k:

$$(24,3) \qquad A_k = B_k\, \widehat{x_1 v}\, \widehat{v x_k^{\alpha_k}}\, D_k\, \widehat{v x_1^{\alpha_1+1}}\, \varphi +$$
$$+ \alpha_k\, B_k\, \widehat{v x_k^{\alpha_k-1}}\, \widehat{x_1 x_k}\, D_k\, \widehat{v x_1^{\alpha_1+1}}\, \varphi ,$$

oder, wenn wir von den Formeln (23, 2₁) und (22, 1) Gebrauch machen:

$$A_k = A_{k+1} + C_k, \quad k = 2, 3, \ldots q-1.$$

Nach Formel (22, 4) aber ist:

$$C_k = \alpha_k (\alpha_1 + 1)(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})\, \varphi,$$

womit (24, 1) bewiesen ist.

Genau ebenso beweist man:

$$(24^*, 1) \qquad A_k^* = A_{k-1}^* + \alpha_k(\alpha_1 + 1)(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})^*\, \varphi, \qquad k = 2, 3, \ldots q-1.$$

Zum Beweise von (24*, 1) vertauschen wir im Ausdruck (23*, 1) von A_k^* $\widehat{v\,x_k}$ mit $\widehat{x_k v^{\alpha_k}}$. Nach Formel 5f), p. 8, ist:

$$(24^*, 2) \qquad \widehat{x_k v^{\alpha_k}}\, \widehat{v\,x_1} = \widehat{v\,x_1}\, \widehat{x_k v^{\alpha_k}} - \alpha_k\, \widehat{x_k v^{\alpha_k - 1}}\, \widehat{x_k x_1}.$$

Somit gilt:

$$(24^*, 3) \qquad A_k^* = B_k^*\, \widehat{v\,x_1}\, \widehat{x_k v^{\alpha_k}}\, D_k^*\, \widehat{x_1 v^{\alpha_1 + 1}}\, \varphi - \alpha_k\, B_k^*\, \widehat{x_k v^{\alpha_k - 1}}\, \widehat{x_k x_1}\, D_k^*\, \widehat{x_1 v^{\alpha_1 + 1}}\, \varphi.$$

Oder, nach (23*, 3) und (22*, 1):

$$A_k^* = A_{k+1}^* - C_k^*.$$

Wegen (22*, 4) ist damit (24*, 1) bewiesen.

25. *Herleitung von* (19, 1) *und* (19*, 1). Das letzte in der Reihe der A_k ist A_q, wobei A_q nach (23, 2) die Form

$$(25, 1) \qquad A_q = B_{q-1} \widehat{x_1 v}\, \widehat{v\, x_{q-1}^{\alpha_{q-1}}}\, D_q\, \widehat{v\, x_1^{\alpha_1 + 1}}\, \varphi$$

besitzt. Nach 5c), p. 8, dürfen wir ohne weiteres $\widehat{x_1 v}$ mit

$$B_{q-1} = \widehat{x_1 v}^{\,\alpha_1}\, \widehat{x_2 v}^{\alpha_2} \cdots \widehat{x_{q-1} v}^{\alpha_{q-1}}$$

vertauschen, folglich ist:

$$A_q = (\alpha_1 + 1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})\, \varphi.$$

Wir erhalten daher nach (24, 1) für A_{q-1}:

$$(25, 2) \qquad A_{q-1} = (\alpha_1 + 1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})\, \varphi + \alpha_{q-1}\, (\alpha_1 + 1)(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})\, \varphi.$$

Da wir auch $\widehat{v\,x_1}$ nach 5b), p. 8, ohne weiteres mit B_{q-1}^* vertauschen dürfen, so gilt analog:

$$(25^*,2) \qquad A^*_{q-1} = (\alpha_1 + 1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})^* \varphi + \\ + \alpha_{q-1}(\alpha_1 + 1)(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})^* \varphi .$$

Setzen wir A_{q-1} in A_q ein usw., schliesslich A_3 in A_2, so erhalten wir für den Ausdruck $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1}) \widehat{x_1 v}\, \widehat{v x_1} \varphi$ die Gleichung:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k, \ldots \alpha_{q-1}) \widehat{x_1 v}\, \widehat{v x_1} \varphi = \\ (\alpha_1 + 1, \alpha_2, \ldots \alpha_k, \ldots \alpha_{q-1}) \varphi + \sum_{k=1}^{q-1} \alpha_k (\alpha_1 + 1)(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k, \ldots \alpha_{q-1}) \varphi .$$

Da nach (18, 0) $\sum_{k=1}^{q-1} \alpha_k = s$ ist, so ist Formel (18, 2) bewiesen.

Genau ebenso ergibt sich (19*, 1) und damit (18, 3).

26. *Beweis der Formeln* (17, 1) *und* (17, 2). Zum Beweis der Formeln (17, 1) und (17, 2) formen wir die linken Seiten dieser Gleichungen vermöge der Formeln (18, 2), (18, 3) um, da ja der Faktor Δ gerade eine Summe von Produkten von der Form $\widehat{x_i v}\, \widehat{v x_i}$ ist. Alle in ihnen enthaltenen Operatoren werden dann die Form: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1}) \varphi$ bzw. $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})^* \varphi$ annehmen. Sodann werden wir beweisen, dass der Koeffizient eines jeden Operators $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1}) \varphi$ bzw. $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})^* \varphi$ auf der linken Seite gleich ist dem Koeffizienten desselben Operators auf der rechten Seite.

Da die entsprechenden Koeffizienten in (17, 1) und (17, 2) die gleichen sind, so braucht der Beweis nur für Q allein geführt zu werden.

Da in Q nur Operatoren vorkommen, für die die Exponentensumme σ je $0, 1, 2, \ldots r$ ist, so wird σ nach der Umformung vermöge (18, 2) in den Operatoren auf der linken Seite von (17, 1) die Werte 1 bis $r + 1$ besitzen. Auf der rechten Seite kommen aber nur Operatoren mit $\sigma = r - 1$ vor. Wir werden also zu beweisen haben, dass die Koeffizienten aller Operatoren auf der linken Seite, für die $\sigma = r + 1$ ist, gleich sind dem Koeffizienten der entsprechenden Operatoren auf der rechten Seite, während alle Operatoren, deren $\sigma \leq r$ ist, herausfallen.

27. Wir behandeln zunächst die Operatoren mit $\sigma = r + 1$.

$A = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{q-1}) \varphi$ sei ein bestimmter Operator mit $\sigma = \Sigma \beta_i = r + 1$, der in $Q_r \frac{(-1) \cdot \Delta}{(r-1)(r+r+1)}$ *nach der Umformung* vorkommt.

Ist $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1}) \varphi$ ein Operator in Q_r und $\widehat{x_i v}\, \widehat{v x_i}$ ein Operator in Δ, so liefert für ihn (18, 2):

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_{q-1})\, \widehat{x_i v}\, \widehat{v x_i}\, \varphi \equiv$$
$$\equiv (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}, \alpha_i + 1, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_{q-1})\, \varphi +$$
$$+ s\,(\alpha_i + 1)(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_{q-1})\, \varphi .$$

Unser A findet sich hier rechts dann und nur dann, wenn

$$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2, \ldots \beta_i = \alpha_i + 1, \ldots \beta_{q-1} = \alpha_{q-1}$$

ist, da $\Sigma \alpha_i \leqq r$ ist und daher nur für den ersten Operator auf der rechten Seite $\sigma = r + 1$ sein kann, und zwar nur dann, wenn $\Sigma \alpha_i = r$ ist.

Der Koeffizient t_i von $(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_i - 1, \ldots \beta_{q-1})\, \widehat{x_i v}\, \widehat{v x_i}\, \varphi$ in $-\frac{Q_r \cdot A}{(r+1)(r+\nu+1)}$ lautet aber nach Gleichung (12,1), p. 10:

$$(27,1) \qquad g_i = \frac{(-1)^r \cdot \nu!}{\beta_1!\, \beta_2! \cdots (\beta_i - 1)! \cdots \beta_{q-1}!\, (r+\nu)!} \cdot \frac{(-1)}{(r+1)(r+\nu+1)} =$$
$$= \frac{(-1)^{r+1} \cdot \nu!\, \beta_i}{\beta_1!\, \beta_2! \cdots \beta_i! \cdots \beta_{q-1}!\, (r+1)\, (r+\nu+1)!} ,$$

Hier kann i jeden Wert $i = 1, 2, \ldots q-1$ annehmen. Die Summe G dieser Koeffizienten ist dann, wegen $\Sigma \beta_i = r + 1$:

$$(27,2) \qquad G = \sum_{i=1}^{q-1} t_i = \frac{(-1)^{r+1} \cdot \nu!}{\beta_1!\, \beta_2! \cdots \beta_{q-1}!\, (r+\nu+1)!} \cdot \frac{\Sigma \beta_i}{r+1} =$$
$$= \frac{(-1)^{r+1} \cdot \nu!}{\beta_1!\, \beta_2! \cdots \beta_{q-1}!\, (r+\nu+1)!} ,$$

und dies ist gerade der entsprechende Koeffizient in (17,1) rechts.

28. Nun sei $\sigma \leqq r$. Es sei $A = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{q-1})\, \varphi$ wieder ein Operator mit $\Sigma \beta_i = s \leqq r$ aus $\frac{(-1)\, A \cdot Q_r}{(r+1)(r+\nu+1)}$ *nach der Umformung*. $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1})\, \varphi$ sei ein Operator in Q_r, den wir mit $\widehat{x_i v}\, \widehat{v x_i}$ multiplizieren; dann ist nach (18,2)

$$(27,3) \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i-1}, \ldots \alpha_{q-1}) \widehat{x_i v}\, \widehat{v x_i}\, \varphi =$$
$$= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}, \alpha_i + 1, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_{q-1})\, \varphi +$$
$$+ s(\alpha_i + 1)\, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_{q-1})\, \varphi .$$

Auf der rechten Seite in (27,3) werden wir nur dann A erhalten, wenn:

1. Entweder $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots \alpha_i + 1 = \beta_i, \ldots \alpha_{q-1} = \beta_{q-1}$ ist. Die Summe der Koeffizienten von A, die wir in diesen Fällen erhalten, bezeichnen wir mit R.

2. Oder $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots \alpha_i = \beta_i, \ldots \alpha_{q-1} = \beta_{q-1}$ ist.

Die Summe der auf diese Weise erhaltenen Koeffizienten sei S. Wir werden sehen, dass $S + R = 0$ ist.

29. R berechnet sich ähnlich wie T, da die Beziehungen zwischen α und β in beiden Fällen dieselben sind, nur ist bei $R: \sigma = \sum_{i=1}^{q-1} \beta_i = s < r$. Daher ergibt sich anstatt t_i in (27,1) für den entsprechenden Beitrag zu R:

$$\beta_i \frac{(-1)^{s-1} \cdot \nu!}{\beta_1! \, \beta_2! \cdots \beta_{q-1}! (s+\nu-1)!} \cdot \frac{(-1)}{(r+1)(r+\nu-1)}.$$

Summieren wir dies über $i = 1, 2, \ldots q-1$, so ergibt sich:

$$(29,1) \qquad R = \frac{(-1)^{s-1} \cdot \nu! \, \Sigma \beta_i}{\beta_1! \, \beta_2! \cdots \beta_{q-1}! \, (s+\nu-1)!} \cdot \frac{(-1)}{(r+1)(r+\nu+1)} =$$

$$= \frac{(-1)^s \cdot \nu! \, s}{\beta_1! \, \beta_2! \cdots \beta_{q-1}! (s+\nu-1)! (r+1)(r+\nu-1)}.$$

30. Ganz analog ergibt sich S. Die rechte Seite von (27,3) hat in $-\frac{Q_r \cdot \Delta}{(r+1)(r+\nu+1)}$ nach Formel (12,1), p. 10, den Koeffizienten:

$$(30,1) \qquad \frac{\nu! \, (-1)^s}{\beta_1! \, \beta_2! \cdots \beta_{q-1}! \, (s+\nu)!} \cdot \frac{(-1)}{(r+1)(r+\nu+1)}.$$

Nach (27,3) ist dies mit $s(\beta_i + 1)$ zu multiplizieren. Das Produkt s_i ist dann:

$$(30,2) \qquad s_i = \frac{\nu! \, (-1)^{s+1}}{\beta_1! \, \beta_2! \cdots \beta_{q-1}! \, (s+\nu)!} \cdot \frac{1}{(r+1)(r+\nu+1)} \cdot s(\beta_i + 1).$$

Summieren wir über $i = 1, 2, \ldots q-1$, so folgt für S:

$$(30,3) \qquad S = \frac{\nu! \, (-1)^{s+1}}{\beta_1! \, \beta_2! \cdots \beta_{q-1}! \, (s+\nu)!} \cdot \frac{1}{(r+1)(r+\nu+1)} \cdot s \sum_{i=1}^{q-1} (\beta_i + 1).$$

Nun ist $\sum_{i=1}^{q-1} (\beta_i + 1) = s + \nu$, daher gilt:

$$S = \frac{\nu! \, (-1)^{s+1}}{\beta_1! \, \beta_2! \cdots \beta_{q-1}! \, (s+\nu)!} \cdot \frac{1}{(r+1)(r+\nu+1)} \cdot s \, (s+\nu)$$

$$= \frac{\nu! \, (-1)^{s+1} \cdot s}{\beta_1! \, \beta_2! \cdots \beta_{q-1}! \, (s+\nu-1)! \, (r+\nu-1)(r+1)}$$

$$= -R, \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Damit sind die Gleichungen (17,1) und (17,2) bewiesen.

31. Besitzt nun φ in (17,1) das Gewicht $w = r + 1$, so ist nach (15,1): $Q_{r+1}\varphi = Q\varphi$.

Folglich ist $Q\varphi$:

$$Q\varphi = \left(1 - \frac{\Delta}{1\,(\nu+1)}\right)\left(1 - \frac{\Delta}{2\,(\nu+2)}\right)\cdots\left(1 - \frac{\Delta}{w\,(w+\nu)}\right)\varphi =$$

$$= \prod_{\sigma=1}^{w}\left(1 - \frac{\Delta}{\sigma\,(\sigma+\nu)}\right)\varphi\,, \text{ wo } \Delta = \sum_{i=1}^{q-1} \widehat{x_i v}\;\widehat{v x_i} \text{ ist.}$$

Besitzt φ das Ergänzungsgewicht $w^* = r + 1$, so wird nach (15,2): $Q^*_{r+1}\varphi = Q^*\varphi$ und daher:

$$Q^*\varphi = \prod_{\sigma=1}^{w^*}\left(1 - \frac{\Delta^*}{\sigma\,(\sigma-\nu)}\right)\varphi\,, \text{ wo } \Delta^* = \sum_{i=1}^{q-1} \widehat{v x_i}\,\widehat{x_i v} \text{ ist.}$$

III. Kapitel.

Die Äquivalenz von Q und Q^*.

32. *Die Identität von K und K^*.* Wir können nun die Identität von K und K^* in (12,3) und (12,5) unmittelbar einsehen. Vertauschen wir z. B. in $\Delta = \sum_{i=1}^{q-1} \widehat{x_i v}\;\widehat{v x_i}$ ein beliebiges $\widehat{x_i v}$ mit $\widehat{v x_i}$, so erhalten wir:

$$(32,1) \qquad \widehat{x_i v}\;\widehat{v x_i}\,\psi = \widehat{v x_i}\;\widehat{x_i v}\,\psi + (w^*_{x_i} - w^*_v)\,\psi.$$

Da φ ein Gradient, mit $w^*_{x_1} = w^*_{x_2} = \ldots$ ist, und da durch Anwendung der $\widehat{x_k v}\;\widehat{v x_k}$ die Gewichte unverändert bleiben, so ist auch ψ eine Form, deren Ergänzungsgewichte einander gleich sind. Deshalb ist:

$$(w^*_{x_i} - w^*_v)\,\psi \equiv 0$$

und daher gilt $\Delta = \Delta^*$, wenn beide Operatoren auf einen Gradienten angewendet werden. Also gilt auch:

$$(32,2) \qquad \prod_{\sigma=1}^{w}\left(1 - \frac{\Delta^*}{\sigma\,(\sigma+\nu)}\right)\varphi = Q\varphi.$$

Wir zeigen nun, dass dies Produkt gleich

$$(32,3) \qquad \prod_{\sigma=1}^{w^*}\left(1-\frac{\Delta^*}{\sigma(\sigma+\nu)}\right)\varphi = Q^*\varphi$$

ist.

Wir machen dabei von der Tatsache Gebrauch, dass $w \leqq w^*$ ist, deren Beweis in den Nummern 33—34 nachgetragen wird. Dann entsteht (32, 3) aus (32, 2), d. h. aus $Q\varphi$, indem man darauf sukzessive die Operatoren

$$1-\frac{\Delta}{\sigma(\sigma+\nu)}, \quad \sigma = w+1, \ldots w^*$$

anwendet, und es genügt zu beweisen, dass die Anwendung eines solchen Operators auf $Q\varphi$ diesen Ausdruck nicht ändert. Dies folgt aber daraus, dass $\Delta\, Q\varphi^* \equiv 0$ ist, da ja $\widehat{x,v}\, Q\varphi \equiv 0$ gilt. Wir haben daher nur noch den Beweis für $w \leqq w^*$ nachzutragen.

33. *Beweis der Ungleichung* $w \leqq w^*$. Nach (2, 6), p. 7, ist:

$$w = \frac{ni+(q-1)\omega}{q}$$

und nach (2, 8), p. 7,

$$w^* = \frac{(q-1)\,ni-\omega}{q}.$$

Nun nehmen wir an, es existiere ein Gradient ψ, für den $w^* < w$ ist. Für diesen Gradienten besteht dann die Ungleichung:

$$\frac{(q-1)\,ni+\omega}{q} < \frac{ni+(q-1)\omega}{q}$$

oder:

$$(q-1)ni+\omega < ni+(q-1)\omega.$$

Wir subtrahieren auf beiden Seiten $ni-\omega$ und erhalten:

$$(q-2)ni < (q-2)\omega,$$

so dass $q > 2$ ist, und daher

$$(33,1) \qquad ni < \omega$$

gilt.

34. Nun zeigt man aber leicht, dass die Ungleichung (33, 1) für keinen Gradienten erfüllt sein kann. Zum Beweise benutzen wir die symbolische Schreibweise der Invarianten und Kovarianten[1]). Kovarianten und Invarianten sind nämlich aus folgenden symbolischen Faktoren zusammengesetzt:

[1]) Vgl. Clebsch, Weitzenböck, sowie Pascal.

1. Faktoren, in denen nur Koeffizientensymbole vorkommen:

$$(a, b, c, \ldots e).$$

Jede Klammer enthält genau q Buchstaben.

2. Faktoren $a_x, b_x, \ldots$, wo $a_x = a_1 x + a_2 y + \cdots + a_q v$ bedeutet.

In einem Potenzprodukte $a_x\, b_x \cdots c_x\ (a, b, \ldots c)\ (a^1, b^1, \ldots c^1) \cdots$ mögen k Faktoren von der Form $(a, b, c, \ldots)$ und h Faktoren von der Form $a_x, b_x, \ldots$ vorkommen; dann ist die Dimension h dieses Ausdruckes in bezug auf die Variablen gleich ω, während seine Dimensionen ni in bezug auf die Koeffizientensymbole $h + qk \geqq \omega = h$ ist. — Damit ist die Äquivalenz von Q und Q^* bewiesen.

Manuskript eingegangen am 30. November 1932.

Curriculum vitae.

Ich, Alwin von Rohr, bin am 22. August 1903 in Olten als Sohn des Rangiermeisters Alwin von Rohr und seiner Gattin Lina, geb. von Rohr, geboren. Hier durchlief ich die städtischen Primar- und Bezirksschulen und trat dann 1920 in das Gymnasium in Altdorf ein. Nach bestandener Maturität im Juli 1923 besuchte ich dann während 6 Semestern die Universität Basel, hierauf für 4 Semester die von Zürich, an der ich im Juli 1928 das Diplom für das höhere Lehramt in Mathematik, Physik und Astronomie erhielt. Im Winter 1928/29 weilte ich ein Semester an der Universität Paris. Im Sommer 1929 liess ich mich wieder in Basel immatrikulieren. Ich übernahm dann auch längere Zeit Stellvertretungen an den Bezirksschulen von Waldenburg, Aarau, Liestal, Olten, sowie an einigen Schulen in Basel.

Ich besuchte Vorlesungen und Übungen bei folgenden Herren Professoren, in Basel: Bächtold, Dürr, Fichter, Häberlin, Hagenbach, Hassinger, Jäger, Matthies, Mohrmann, Niethammer, Ostrowski, Rupe, Senn, Spiess, Veillon, Zschokke; in Zürich: Brunner, Finsler, Fueter, E. Meyer, K. Meyer, Scherrer, Schrödinger, Speiser; in Paris: Borel, Cartan, Mme Curie, Guyot, Renouvier; ferner bei Dr. Buchner und Dr. Wackernagel in Basel, Dr. Bär in Zürich. Ein Semester besuchte ich auch das kant. Lehrerseminar von Basel und nahm dort an den Übungen der Herren Dr. Brenner und Schlienger teil.

Allen diesen Herren möchte ich danken, insbesondere aber Herrn Prof. Dr. Ostrowski, der mich bei meiner Arbeit mit eifrigem Interesse und sicherm Rat unterstützte.